Arithmétique par intervalles

École Précis - 15-19 mai 2017

Exercice 1 : pour démarrer

1.1 Installez le package `interval` grâce à `pkg install -forge interval`.

1.2 Après avoir lancé Octave, chargez le package `interval` grâce à `pkg load interval`, vous pourrez alors l'utiliser.

1.3 Pour voir un maximum de chiffres lors de l'affichage des résultats, utilisez `format long`.

Exercice 2 : quelques formules

2.1 Comparez l'intervalle obtenu grâce à la formule de Machin (pour information, la fonction arctangente s'appelle `atan` en Octave) à l'intervalle $\pi/4$ (pour information, la constante π s'appelle `pi` en Octave) :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

2.2 Évaluez en arithmétique par intervalles la formule de Rump :

$$(333 + 3/4)b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 11/2b^8 + a/(2b)$$

avec $a = 77617.0$ et $b = 33096.0$.

Exercice 3 : produit de matrices, inf-sup et mid-rad

3.1 Créez deux matrices A et B aléatoirement, de la forme $[A_1 - A_2, A_1 + A_2]$ avec A_2 à composantes positives. Vous pouvez paramétrer l'ordre de grandeur de A_2 : $A_2 = \mathit{coeff} * \mathit{rand}(\ldots)$ avec *coeff* une puissance de 10 par exemple.

3.2 Calculez $C = A * B$.

3.3 Calculez C' qui contient le produit $A*B$ grâce aux formules rapides ci-dessous utilisant la représentation par centre et rayon. On note A_M (resp. $B_M \ldots$) le milieu de A (resp. de $B \ldots$) et A_R (resp. $B_R \ldots$) le rayon de A (resp. de $B \ldots$). Des formules n'utilisant que 4 produits matrice-matrice sont les suivantes :

$$\begin{array}{rcl} C'_M & = & \mathrm{RN}(A_M * B_M), \\ C'_R & = & \mathrm{RU}((|A_M| + A_R) * B_R + A_R * |B_M| + 4\mathrm{eps} * |A_M| * |B_M|), \end{array}$$

où `eps` est la précision machine. Comparez C et C', en particulier en faisant varier *coeff*.

Vous aurez besoin de changer le mode d'arrondi : `__setround__ (+inf);` permet de passer en arrondi vers le haut (RU), `__setround__ (-inf);` en arrondi vers le bas et `__setround__ (0.5);` permet de revenir en arrondi au plus près (RN).

3.4 Essayez maintenant `C'' = mtimes(A,B,"valid")` : il s'agit de l'appel au produit de matrices le plus rapide d'Octave. Comparez la précision des résultats.

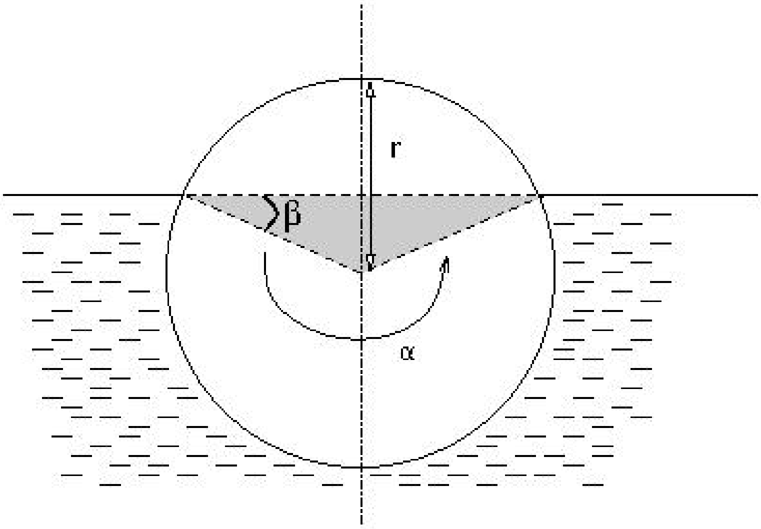
Exercice 4 : recherche de zéros avec Newton

On étudie un convoi de troncs flottant sur une rivière. On souhaite savoir de combien ces troncs s'enfoncent dans l'eau, selon leur densité ρ_B, et on note ρ_E la densité de l'eau.

On suppose que les troncs sont des cylindres parfaits, on ne considère donc que leur section, pour se ramener à un problème en 2 dimensions seulement (au lieu de 3).

L'objectif est d'appliquer le principe de la poussée d'Archimède : tout corps plongé dans l'eau reçoit une poussée égale au poids du volume d'eau déplacé.

Si on regarde un tronc en coupe :



on note r le rayon du tronc, l'angle α détermine de combien le tronc est immergé et l'angle β nous servira à simplifier nos calculs.

L'aire du triangle grisé, qui est formé de deux triangles rectangles de côté $r \sin \beta$ et $r \cos \beta$, est égale à $r^2 cos\beta \sin \beta = r^2/2 \sin(2\beta)$.

Exprimons β en fonction de α, en utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle (en l'occurrence, le triange grisé) vaut π :

$$2\pi - \alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow 2\beta = \alpha - \pi.$$

Finalement, l'aire immergée est égale à αr^2 pour la partie sous le triangle grisé, plus l'aire du triangle grisé, c'est-à-dire $\alpha/2r^2 + r^2/2 \sin(2\beta) = \alpha r^2/2 + r^2/2 \sin(\alpha - \pi) = (\alpha - \sin \alpha) r^2/2$.

Pour finir, exprimons la poussée d'Archimède : le poids du bois, qui vaut $\pi r^2 \rho_B g$, est égal au poids du volume d'eau déplacé, qui vaut $(\alpha - \sin \alpha) r^2/2 \rho_E g$. En simplifiant, on obtient l'équation à résoudre :

$$2\pi \frac{\rho_B}{\rho_E} = \alpha - \sin \alpha.$$

On pourra essayer avec $\rho_E = 1$ et différentes densités de bois :

bambou	0,30	noyer	0,57	bois de rose	0,90
peuplier	0,40	poirier	0,65	ébène	1,20
pin	0,42	chêne rouge	0,74		

Vous aurez besoin par la suite de passer des fonctions en paramètres. Voici comment procéder en Octave :

— vous créez votre fonction :

```
function res = nom_fn (param1, param2,...)
  ...
endfunction;
```

— vous créez un *handler* de fonction, selon le vocabulaire Octave :
`handler_fn = @nom_fn`

— vous pouvez maintenant passer votre fonction en paramètre, via son *handler* :
`sol = Newton( handler_fn, x0...) % exemple pas totalement fictif`

4.1 Créez, en Octave, la fonction et sa dérivée sous la forme d'une fonction et de son *handler*.

4.2 Créez des intervalles de départ sous la forme `X0 = infsup (-0.5, 3.5);` puis utilisez la commande `fzero` : `fzero (f, X0, fprime)` vous donnera tous les zéros de la fonction `f` qui appartiennent à l'intervalle `X0`. (Les paramètres `f` et `fprime` sont des *handlers* de fonctions.) Utilisez-la pour résoudre le problème donné. Que constatez-vous pour différentes densités de bois ?